中心電荷24の枠付頂点作用素代数について (有限群とその表現,頂点作用素代数,代数的組合せ論の研究)

島倉, 裕樹

数理解析研究所講究録
第 1872 巻 2014 年 20-29

中心電荷 24 の枠付頂点作用素代数について

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター
Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
e-mail: shimakura@m.tohoku.ac.jp

本稿では中央研究院 (台湾) の C.H. Lam 氏と筆者の最近の共同研究 [LS] の解説を行う.

1 序

最終的な目標は次の解決である.

問題 1.1. 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を分類せよ.

正則頂点作用素代数[1]とは, 既約加群が自分自身と同型となるような頂点作用素代数 (VOA) である. 例えば, モンスター単純群を自己同型群に持つムーンシャイン VOA は正則である.

正則 VOA の分類は VOA の研究当初からの基本的な問題である. まず, [Zh96] より, 正則 VOA の中心電荷は 8 の正の倍数である. さらに, 中心電荷 8 及び 16 の正則 VOA は格子 VOA と同型になることが [DM04b] で示されている. したがって, 分類されていない最小の中心電荷である 24 の場合に興味がある.[2]

格子, 符号と VOA の間に多くの類似があることはよく知られている. 例えば, ムーンシャイン VOA はゴレイ符号, リーチ格子に対応する対象物と思うことが出来る.[3] そうすると, 正則 VOA に対応するのは自己双対重偶符号, ユニモジュラ偶格子である. さて, 24 に関する符号及び格子における分類結果を思いだそう.

定理 1.2. • 長さ 24 の自己双対重偶符号は同値を除いて丁度 9 個あり, それらは重さ 4 の符号語の生成する部分符号の同値類から一意に決まる.

[1] 本稿では単純, 有理的, C_2-有限, CFT 型も仮定している. VOA の定義は [Bo86, FLM88] を参照せよ.

[2] 階数が 32 以上のユニモジュラ偶格子は (分類が難しいくらいに) 多数存在する. したがって, 中心電荷 32 以上の場合には, 正則格子 VOA が無数に存在する. よって, 正則 VOA の分類問題を (そのままでは) 考える意味があまりない.

[3] 例えば, ムーンシャイン VOA の一意性はゴレイ符号とリーチ格子の一意性に対応すると思われる.

- 階数 24 のユニモジュラ偶格子は同型を除いて丁度 24 個あり, それらはノルム 2 のベクトルから成るルート系から一意に決まる.

自己双対重偶符号における重さ 4 の符号語の生成する部分符号, ユニモジュラ偶格子におけるノルム 2 のベクトルが成すルート系に対応するのは VOA の共形重さ 1 の空間上のリー代数であると考えられている. よって, VOA において次が成立することが期待される.

期待 1.3. 中心電荷 24 の正則 VOA は共形重さ 1 の空間に入るリー代数構造[4]から一意に決まる.

しかしながら, これはムーンシャイン VOA の一意性問題を含む難しい問題である.[5] また, 仮に $V_1 \neq 0$ であったとしても, 一般には V_1 が生成するアファイン VOA の拡大として正則 VOA を構成することが非常に困難である.[6]

さて, 中心電荷 24 の正則 VOA のリー代数構造に関して, 71 通りの可能性のリストが [Sc93] によって提出されている.[7] 現在では, このリストを参考にしつつ, 正則 VOA を構成及び分類をする研究が行われている.

よく知られている正則 VOA はユニモジュラ偶格子に付随する正則格子 VOA である ([Bo86, FLM88]). この場合には中心電荷は格子の階数に等しくなる. したがって, 24 個の階数 24 のユニモジュラ偶格子から, 24 個の中心電荷 24 の正則格子 VOA が構成される. また, 格子の自己同型 -1 に付随する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法を用いることで, 新たに正則 VOA を構成することが出来 ([FLM88, DGM96]), 24 個の中心電荷 24 の正則 VOA が得られる. そのうち 9 個は格子 VOA と同型となるため, (格子 VOA と非同型な) 15 個の中心電荷 24 の正則 VOA が $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法から得られる. 合計で 39 個の中心電荷 24 の正則 VOA がユニモジュラ偶格子から構成されていた.

また, 中心電荷 24 正則 VOA 構造のリー代数による特徴付けは, リー代数が可換, またはリー代数のランクが 24 ならば格子 VOA と同型になる ([DM04b]), だけであった.

筆者は Lam 氏と共同で**枠付**の仮定の下で正則 VOA の研究を行ってきた. 既に [La11, LS12] において, 中心電荷 24 の枠付正則 VOA のリー代数構造は 56 個に限ること, また各リー代数に対して, 少なくとも一つは枠付正則 VOA が存在することを示している. このリー代数の分類は本質的に長さ 48 の三重偶符号の分類 ([BM12]) に寄っていることを注意しておく. 分類結果[8]から, 51 個のリー代数に対しては, それを持つ枠付正則 VOA が一意に決まることがわかっていた.

---

[4] 正確にはリー代数構造とアファイン表現のレベル.

[5] 中心電荷 24 の正則 VOA U が $U_1 = 0$ ならばムーンシャイン VOA と同型である, という予想.([FLM88])

[6] 指標を見ることで, アファイン VOA の加群としての構造 (の可能性) が記述可能かもしれない. しかしながら, 単純カレント拡大とはならない (と思われる) ので, アフィン VOA と加群の直和上に VOA 構造が入ることを示すのが非常に難しい (と思われる).

[7] 筆者は数学的には完全な証明は与えられていないと考えている. 結果の一部は [DM04b] によって数学的に正当化されている.

[8] リー代数に対して, それを持つ枠付正則 VOA が (大雑把な同型判定の下で) ただ一つしかない, ことから, “たまたま”リー代数から枠付正則 VOA が一意に決まる場合が多々あった.

最近, 残りの 5 つのリー代数を持つ枠付正則 VOA の一意性について研究し [LS], 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類問題が解決した.

定理 1.4. [La11, LS12, LS] 中心電荷 24 の枠付正則 VOA は(同型を除いて) 丁度 56 個存在し, それらは共形重さ 1 のリー代数構造から一意に決まる.

今後は, 本来の問題の解決のために, 枠付でない正則 VOA の研究を行う必要がある. その方向の一つとして, 宮本先生による格子 VOA の $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成を用いた正則 VOA の構成を試みている ([Mi, SS]).

2 枠付頂点作用素代数と構造符号

本節では枠付 VOA の定義と性質について述べる. 詳細は [DGH98, Mi04, LY08] 等を参照せよ.

$L(1/2,0)$ を中心電荷 1/2 の単純ヴィラソロ VOA とする. $L(1/2,0)$ は有理的であり, 既約加群は同型を除いて $L(1/2,0), L(1/2,1/2), L(1/2,1/16)$ の三つである.

定義 2.1. [DGH98] V を単純 VOA とする. V が **枠付 (framed)** であるとは **(ヴィラソロ) 枠**と呼ばれる $L(1/2,0)^{\otimes r}$ と同型な full 部分 VOA [9]が存在することである.

定理 2.2. [DGH98] 枠付 VOA は有理的, C_2-有限, CFT 型である.

V を枠付 VOA として, T_r をヴィラソロ枠とする. T_r は有理的なので, V は T_r-加群として完全可約である. また, 任意の既約 T_r-加群は既約 $L(1/2,0)$-加群の r 個のテンソル積と同型になる. よって T_r-加群として

$$V \cong \bigoplus_{h_i \in \{0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}\}} m_{h_1,\dots,h_r} \bigotimes_{i=1}^{r} L(1/2, h_i)$$

と分解される. ただし $m_{h_1,\dots,h_r}$ は重複度であり, 有限である ([DMZ94]).

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}_2^r$ に対して, V^α で $h_i = 1/16$ となるのが $\alpha_i = 1$ に限られる V の T_r-部分加群 $m_{h_1,\dots,h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i)$ の和を表すとする. 特に V^0 は部分 VOA となり, V^α は V^0-加群となる.

命題 2.3. [DGH98] $D := \{\alpha \in \mathbb{Z}_2^r \mid V^\alpha \neq 0\}$ は長さ r の $\mathbb{Z}_2$ 上の線形符号となる.

さらに, V^0 の T_r-加群としての分解を考えて,

$$V^0 \cong \bigoplus_{h_i \in \{0,\frac{1}{2}\}} m_{h_1,\dots,h_r} \bigotimes_{i=1}^{r} L(1/2, h_i).$$

を得る. このとき, 重複度 $m_{h_1,\dots,h_r}$ は 1 または 0 となる ([DMZ94]). ここで $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{Z}_2^r$ に対して M^β を V^0 の T_r-部分加群 $m_{h_1,\dots,h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i)$ で $h_i = 1/2$ となるのが $\beta_i = 1$ に限られる加群を表すことにする.

[9]部分 VOA が **full** とはヴィラソロ元が一致することをいう.

命題 2.4. [DGH98] $C := \{\beta \in \mathbb{Z}_2^r \mid M^\beta \neq 0\}$ は長さ r の $\mathbb{Z}_2$ 上の線形符号となる.

定義 2.5. 符号の組 (C, D) を T_r に関する V の**構造符号** (**structure codes**) という. C を 1/2-**符号**, D を 1/16-**符号**という.

注意 2.6. 構造符号はヴィラソロ枠の取り方に依存する.

枠付正則 VOA の構造符号について次の結果がある.

定理 2.7. [LY08] (cf. [DGH98, Mi04]) 構造符号 (C, D) を持つ枠付正則 VOA が存在するための必要十分条件は (1) $C = D^\perp$, (2) 符号の長さが 16 の倍数, (3) $(1, 1, \ldots, 1) \in D$, (4) D は三重偶符号[10]である.

3 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類

この章では中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類の方法の概略について説明をする. 詳細は [LS] を参照されたい.

3.1 正則枠付 VOA の分類方針

U を中心電荷 $8k$ の枠付正則 VOA とする. このとき, U をヴィラソロ枠が生成する $L(1/2, 0)^{\otimes 16k}$ と同型な部分 VOA の加群として分解することで, 前章のように二つの長さ 48 の二元符号 (構造符号) C, D が得られる. 定理 2.7 より D は $\mathbf{1} = (1^{16k})$ を含む三重偶符号であり, $C = D^\perp$ である.

この 1/16-符号に着目すると, 次の手順で中心電荷 $8k$ の枠付正則 VOA の分類を行えば良いことになる:

(1) 長さ $16k$ の三重偶符号を分類する.

(2) 各々の長さ $16k$ の三重偶符号に対して, それを 1/16-符号として持つような枠付正則 VOA を分類する.[11]

3.2 三重偶符号の分類

弘前大学の別宮氏と東北大の宗政氏によって長さ 48 の (極大) 三重偶符号が分類された ([BM12]). その分類結果から, 次の定理が成立する.

定理 3.1. [BM12] 長さ 48 の三重偶符号は次のいずれかの符号の部分符号と同値.

---

[10] 任意の $d = (d_i) \in D$ に対して, $\mathrm{wt}(d) = |\{i \mid d_i \neq 0\}| \in 8\mathbb{Z}$.

[11] 各三重偶符号に対して, それを 1/16-符号として持つ枠付正則 VOA は少なくとも一つ存在する.([LY08])

(I) $\mathcal{D}(E) = \langle d(e), (\mathbf{1}, 0) \mid e \in E \rangle_{\mathbb{F}_2}$. (E は長さ 24 の重偶符号[12])

(II) Reed-Muller 符号 RM(1, 4) の三つの直和.

(III) $\mathrm{RM}(1,4) \oplus \mathcal{D}(d_{16}^{+})$. (d_{16}^{+} は分解不可能な長さ 16 の自己双対重偶符号.)

(IV) 9 次元の極大三重偶符号 D^{ex}.

この各々の場合に, VOA 構造を決めることで中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類が完成する.

3.3 (I) に付随する VOA

(I) の場合は, [La11] によって U が格子 VOA V_L または, その $\mathbb{Z}_2$-軌道体[13] $\tilde{V}_L$ に同型となることが示されている. また逆に, 任意の階数 24 のユニモジュラ偶格子 L に対して, V_L と $\tilde{V}_L$ が枠付正則 VOA となる.[14] したがって, 次が成立する.

命題 3.2. ([Do93, DGM96]) U を (I) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA とする. このとき, U の VOA 構造は U_1 のリー代数構造から一意的に決まる. 特に, (I) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA は同型を除いて丁度 39 個存在する.

3.4 (II) に付随する VOA

(II) の場合は, U が $\mathrm{RM}(2,4)^{\oplus 3}$ に付随する符号 VOA を部分 VOA として持つ. $V = V_{\sqrt{2}E_8}^{+}$ と置くと, この部分 VOA は $V^{\otimes 3}$ と同型となる. さらに, V の全ての既約加群が単純カレントとなることから, U は $V^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大となる. また, V の既約加群の同型類全体の集合 $R(V)$ 上に分岐則を用いて $\mathbb{F}_2$ 上 10-次元の線形空間の構造が入り ([AD04, ADL05]), 加群の次数付けを用いて $R(V)$ 上にプラス型の二次形式を定義することが出来る ([Sh04]). ゆえに, $R(V^{\otimes 3})$ を $R(V)^3$ と同一視をすることで, U の $V^{\otimes 3}$-加群の構造を $\mathbb{F}_2$ 上のプラス型の 30-次元の直交空間の極大特異部分空間を用いて記述することが出来る. その極大特異部分空間を分類[15]することで, $V^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大としての VOA 構造の可能性がわかり, 実際にそのような VOA が存在する ([Sh11, LS12]). その結果, 知られている 39 個の正則 VOA を除いて, (リー代数の構造を見ることで) 少なくとも 10 個の正則 VOA が得られる事が分かる.

---

[12] $\mathbf{1} = (1^{24})$, $d : \mathbb{F}_2^{24} \to \mathbb{F}_2^{48}$, $c \mapsto (c, c)$ であり, $\mathcal{D}(E)$ は **(extended) doubling** と呼ばれる.

[13] 本稿では $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られた VOA の事を, 単に $\mathbb{Z}_2$-軌道体と書いている. 固定点として得られる部分 VOA が $\mathbb{Z}_2$-軌道体と呼ばれる事があることを注意しておく.

[14] 任意の階数 24 のユニモジュラ偶格子が 4-フレームを持つ.([HK00]) そして, 格子 L の 4-フレームから V_L と $\tilde{V}_L$ のヴィラソロ枠が構成できる. ([DMZ94])

[15] 実際には, 同型な VOA を与えるような同値類 ($\mathrm{Aut}V^{\otimes 3}$ の共役) で考えれば良い.

また，単純カレント拡大の一意性 ([DM04a]) を用いることで，極大特異部分空間から VOA 構造が一意的に決まることがわかる．これによって，殆どの場合はリー代数構造から VOA 構造が一意的に決まることが示されていた．ただし，二つのリー代数 $\mathfrak{g}(C_8F_4^2)$, $\mathfrak{g}(A_7C_3^2A_3)$ の場合に対応する極大特異部分空間が二つ存在することから，それぞれに対して，高々二通りの VOA 構造の可能性が残されていた．

[LS] において，各々の場合に VOA が同型な格子 VOA の共役な位数 2 の自己同型に対する $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られることを示した．したがって，次が成立する．

定理 3.3. U を (II) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA とする．このとき，U の VOA 構造は U_1 のリー代数構造から一意的に決まる．特に，(II) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA は，命題 3.2 の VOA を除くと，同型を除いて丁度 10 個存在する．

3.5 (III) に付随する VOA

(III) の場合は U が $V_{\sqrt{2}E_8}^+ \otimes V_{D_{16}^+}^+$ の単純カレント拡大となる．この場合も (II) と同様にして，直交空間の計算へ帰着され，[LS12] において次の結果を得ている．[16]

命題 3.4. U を (III) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA とする．このとき，U の VOA 構造は U_1 のリー代数構造から一意的に決まる．特に，(III) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA は，命題 3.2 と定理 3.3 の VOA を除くと，同型を除いて丁度 4 個存在する．

3.6 (IV) に付随する VOA

(IV) の場合には，[La11] において，D から U_1 のリー代数構造が一意的に決まることが示されている．さらに，[LY08] において，D を 1/16-符号として持つ枠付正則 VOA が少なくとも一つは存在することが示されている．したがって，D から VOA 構造が一意的に決まるかどうかが問題として残されていた．

[LS] では，D がある種の仮定[17]の下で，σ-対合の共役を用いて D から枠付正則 VOA 構造が一意的に決まることを示した．特に，D^{ex} の部分符号がこの仮定を満たすことから，次の定理を得ている．

定理 3.5. 長さ 48 の三重偶符号 D が D^{ex} の部分符号であるとする．このとき，D を 1/16-符号として持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA は同型を除いてただ一つである．

また，(IV) を満たし，(I),(II),(III) を満たさない三重偶符号は同値を除いて丁度 3 個存在する ([BM12])．したがって，次の定理を得る．

[16] (II) の場合と異なり，異なる極大特異部分空間が，異なるリー代数構造を与えるため，一意性についての議論をする必要がない．

[17] $\dim\langle x\cdot y \mid x,y\in D\rangle_{\mathbb{Z}_2} = \binom{\dim D}{2} + 1$. ただし $(x_i)\cdot(y_i) = (x_iy_i)$ である．

定理 3.6. U を (IV) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA とする. このとき, U の VOA 構造は U_1 のリー代数構造から一意的に決まる. 特に, (IV) を満たす 1/16-符号を持つ中心電荷 24 の枠付正則 VOA は, 命題 3.2, 3.4 と定理 3.3 の VOA を除いて, 同型を除いて丁度 3 個存在する

以上で中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類は完了した.

注意 3.7. [La11, LS12] から, 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の共形重さ 1 のリー代数の既約成分のアファイン表現のレベルが全て (1 も含めた) 2 の冪であることがわかる. 逆に, [Sc93] におけるリストにおいて, 一つの例外 $(E_{6,4}C_{2,1}A_{2,1})$ を除き, レベルが 2 の冪であるリー代数は枠付 VOA の共形重さ 1 の空間として実現されている. この一つの例外も枠付正則 VOA から (ヴィラソロ枠を保たない) $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られると思われる[18].

しかしながら, これらリー代数と枠付との関係は完全に分かったと言えない. 例えば, 次の問題の解決はリー代数と枠付の間の関係をよりはっきりとさせると思われる.

問題 3.8. 中心電荷 24 の正則 VOA の重さ 1 の空間に現れるリー代数が [La11, LS12] で得た 56 個のうちの一つならば, 枠付となることを証明せよ.

4 Niemeier 格子 VOA からの $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成

枠付 VOA は枠を保つような $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で閉じていることが知られている ([LY08]). したがって, 枠付でない正則 VOA を構成するには, 新しい正則 VOA の構成法を用いる必要があると思われる[19]. その一つに, $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法がある. 最近になって, 宮本氏によって, 正則格子 VOA から $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成法を用いて, 新たな正則 VOA が構成できることが次のように証明された.

定理 4.1. ([Mi]) L を階数 24 のユニモジュラ偶格子 (Niemeier 格子) , σ を L の位数 3 の自己同型とし,[20] V_L の σ-twisted (resp. σ^2-twisted) 既約加群 $V_L(\sigma)$ (resp. $V_L(\sigma^2)$) の整数重さの部分空間を $V_L(\sigma)_\mathbb{Z}$ (resp. $V_L(\sigma^2)_\mathbb{Z}$) とする. ここで $L^\sigma = \{v \in L \mid \sigma(v) = v\}$ の階数が 6 で割り切れると仮定する. このとき, $\tilde{V}_L = V_L^\sigma \oplus V_L(\sigma)_\mathbb{Z} \oplus V_L(\sigma^2)_\mathbb{Z}$ は (V_L^σ の単純カレント拡大として) 中心電荷 24 の正則 VOA 構造を持つ.

この定理を用いて次が示されている.

定理 4.2. ([Mi]) L を E_6^4 をルート格子としてもつ Niemeier 格子とする. このとき, ある位数 3 の L の自己同型に付随する $\tilde{V}_L$ の共形重さ 1 の空間のリー代数構造は $E_{6,3}G_{2,1}^3$ である.

---

[18] [Mo98] には (リー代数レベルで) $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で作られると述べられている.

[19] 注意 3.7 で述べたように, あと一つは $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法で得られると考えている. しかし, 全ての正則 VOA を $\mathbb{Z}_2$-軌道体構成法だけで得るのは無理だと思っている.

[20] σ の位数が奇数なので, V_L の自己同型への位数を保つ持ち上げが存在し, それを再び σ を書く.

これは注意 3.7 から, レベルを見ることで, 枠付でない新しい正則 VOA であることが直ちにわかる. 他の Niemeier 格子について, $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成法で構成される正則 VOA のリー代数構造を調べて, 次の結果を得た.

定理 4.3. ([SS]) L を A_2^{12} をルート格子に持つ Niemeier 格子とする. このとき, ある位数 3 の L の自己同型に付随する $\tilde{V}_L$ の共形重さ 1 の空間のリー代数構造は $A_{2,3}^6$ である.

これも注意 3.7 から, レベルを見ることで, 枠付でない新しい正則 VOA であることが直ちにわかる. 別の新しい正則 VOA がこの方法で得られる可能性があるため, 筑波大学の佐垣氏と共同で引き続き研究を行っている.

5 今後の課題

目標を達成するために, まずは次をやるべきである.

- [Sc93] のリストにある 71 個のリー代数に対して, それを共形重さ 1 の空間にもつ中心電荷 24 の正則 VOA の構成

既に 56 個のリー代数が枠付正則 VOA から得られ, また 2 個のリー代数が格子 VOA の $\mathbb{Z}_3$-軌道体から得られることが分かっている ([Mi, SS]). [SS] では全ての Niemeier 格子と位数 3 の自己同型の場合の計算を行ったわけではないので, 同様な方法でさらに新しい正則 VOA が得られる可能性がある. さらに, $\mathbb{Z}_3$-軌道体構成法理論を拡張し, 格子 VOA 以外の正則 VOA に $\mathbb{Z}_3$-軌道体が構成できれば, さらに新しい正則 VOA が得られる可能性がある. また, もっと一般の p に対する $\mathbb{Z}_p$-軌道体構成法の理論が完成すれば, さらに正則 VOA が得られる可能性がある. これら計算の際には, リー代数レベルでの計算 ([Mo98]) によって, どのような軌道体構成を行えば良いかがわかると思われる. 一方で, $L(1/2,0)$ 以外の VOA を用いた枠付 VOA の理論の拡張も考えられると思う. 現在は, 色々な構成法を模索している状況にある.

その後, 次を考えるべきであろう.

- 共形重さ 1 の空間のリー代数構造から, それを持つ中心電荷 24 の正則 VOA の構造は一意に決まるか?

今回の結果から, 56 個のリー代数の場合については, リー代数構造を基にして, 枠付を示せば一意性が証明できる. (問題 3.8) また, [Sc93] のリストが正しいことの (簡明な) 証明を (数学的に) 与えることも今後の課題の一つである.

また, 71 はモンスターの位数を割り切る最大の素数であるので, (偶然の一致かもしれないが) この分類問題はモンスターとの関連を期待させる.[21]

---

[21]原田先生が 71 歳の間に 71 個の構成の目処を付けたいところであったが (cf. [Ha11]), 一つ一つ手作りしている状況である ([Mi, SS]).

参考文献

[AD04] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+: general case. *J. Algebra* **273** (2004), 657–685

[ADL05] T. Abe, C. Dong, and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebra $M(1)$ and V_L^+, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.

[BM12] K. Betsumiya and A. Munemasa, On triply even binary codes, *J. Lond. Math. Soc.* **86** (2012), 1–16.

[Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.

[Do93] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.

[DGH98] C. Dong, R.L. Griess, and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.

[DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.

[DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.

[DMZ94] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Sympos. Pure Math.* **56** (1994), 295–316.

[FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

[Ha11] 原田耕一郎, ひとつの素数 71, 数学セミナー 2011 年 11 月号, 1

[HK00] M. Harada and M. Kitazume, Z_4-code constructions for the Niemeier lattices and their embeddings in the Leech lattice, *European J. Combin.* **21** (2000) 473–485.

[La11] C.H Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 153–198

[LS12] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, *Proc. Lond. Math. Soc.* **104** (2012), 540–576.

[LS] C.H. Lam and H. Shimakura, Classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, preprint, arXiv:1209.4677.

[LY08] C. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 237–285.

[Mi04] M. Miyamoto, A new construction of the Moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.

[Mi] M. Miyamoto, A $\mathbb{Z}_3$-orbifold theory of lattice vertex operator algebra and $\mathbb{Z}_3$-orbifold constructions, preprint, arXiv:1003.0237.

[Mo98] P.S. Montague, Conjectured Z_2-orbifold constructions of self-dual conformal field theories at central charge 24 - the neighborhood graph, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 105–120.

[SS] D. Sagaki and H. Shimakura, in preparation.

[Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.

[Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.

[Sh11] H. Shimakura, An E_8-approach to the moonshine vertex operator algebra, *J. Lond. Math. Soc.* **83** (2011), 493–516.

[Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.